

Série 6 — Analyse Numérique

Cours Années : G1 → G7

Exercice 1Soient A une matrice diagonalisable et $\mu \notin Sp(A)$.

- 1- Montrer que la méthode de la puissance inverse appliquée à la matrice $(A - \mu I)$ converge vers la valeur propre la plus proche de μ , que l'on notera λ_i .
- 2- Montrer que le taux de convergence est $|\mu - \lambda_i|/|\mu - \lambda_j|$, où λ_j est la seconde plus proche valeur propre de μ .
- 3- En déduire une méthode d'accélération de la convergence de la méthode de la puissance inverse.

Exercice 2Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. On définit l'ensemble

$$S = \{\lambda \in \mathbb{C} / \text{il existe } x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}, Ax = \lambda Bx\}$$

On désire déterminer l'élément de S , noté $s(A, B)$, le plus petit en module.1- Montrer que si A est non inversible, alors $s(A, B) = 0$.2- Dans la suite, on supposera que A et B sont inversibles.En utilisant la méthode de la puissance, donner un algorithme permettant de déterminer $s(A, B)$ et préciser les hypothèses permettant d'assurer la convergence de cet algorithme.**Exercice 3**Une matrice carrée $H = (h_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ d'ordre n , est dite de *Hessenberg supérieure* si : $h_{ij} = 0$ pour $i > j + 1$.1- Montrer que si R est une matrice triangulaire supérieure d'ordre n , alors RH et HR , où H est de Hessenberg supérieure, sont elles-mêmes deux matrices de Hessenberg supérieures.2- On considère l'algorithme QR pour la recherche des valeurs propres d'une matrice A d'ordre n , inversible :

$$A_1 = A, \quad \begin{cases} A_k = Q_k R_k \\ A_{k+1} = R_k Q_k \end{cases} \quad \text{pour } k \geq 1$$

2-a Montrer que si A est de Hessenberg supérieure, alors toutes les matrices A_k , ainsi que les matrices Q_k le sont aussi.2-b En déduire que si A est tridiagonale symétrique, alors les matrices A_k sont aussi tridiagonales symétriques.3- On considère l'algorithme QR avec translation pour la recherche des valeurs propres d'une matrice A d'ordre n , inversible :

$$A_1 = A, \quad \begin{cases} A_k - \nu_k I = Q_k R_k \\ A_{k+1} = R_k Q_k + \nu_k I \end{cases}$$

où I est la matrice identité, et les nombres ν_k sont définis par un algorithme approprié.3-a Montrer que si A est de Hessenberg supérieure, alors les itérées successives A_k le sont aussi.3-b Que peut-on dire des A_k lorsque A est tridiagonale symétrique ?

Exercice 4

Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.

1- Soient $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale et $B = QAQ^T$.

Montrer que λ est une valeur propre de B de vecteur propre associé u , si et seulement si λ est une valeur propre de A de vecteur propre associé $Q^T u$.

2- Supposons connus une valeur propre λ de A ainsi qu'un vecteur propre associé $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ avec $\|x\|_2 = 1$ et $x_1 < 0$.

On considère une matrice de Householder élémentaire $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $Hx = e^{(1)}$, où $e^{(1)}$ est le premier vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^n .

2-a Ecrire H en fonction de x .

2-b Soit $B = HAH$. Calculer $Be^{(1)}$. En déduire que B a la forme suivante :

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & \tilde{B} & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \text{ avec } \tilde{B} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R}).$$

2-c Quelles sont les valeurs propres de \tilde{B} ? Expliquer comment on peut déterminer les vecteurs propres de B à partir des vecteurs propres de \tilde{B} .

3- On suppose que les valeurs propres de A vérifient :

$$|\lambda_1| \leq \cdots \leq |\lambda_{n-2}| < |\lambda_{n-1}| < |\lambda_n|.$$

Expliquer comment on peut appliquer les résultats précédents pour déterminer les deux valeurs propres λ_n et λ_{n-1} ainsi que les vecteurs propres associés, en utilisant la méthode de la puissance.

4- Application : Soit A la matrice donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 2 \\ 10 & 5 & -8 \\ 2 & -8 & 11 \end{pmatrix}.$$

Sachant que $\lambda = 18$ est une valeur propre de A de vecteur propre associé $x = \frac{1}{3}(-1, -2, 2)^t$, calculer B et \tilde{B} .

En déduire les autres valeurs propres de A , ainsi que les vecteurs propres associés.